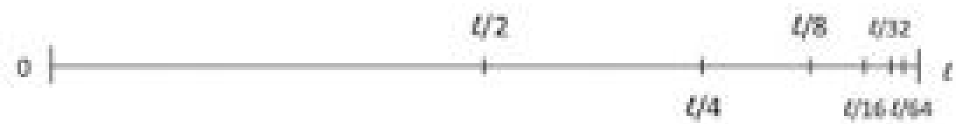
Zenone: il paradosso della dicotomia (o paradosso dello stadio)

Eccoci giunti alla seconda puntata dei paradossi formulati dal greco Zenone. Mentre il primo paradosso trattato, riguardava sostanzialmente il tempo, questo riguarda lo spazio. Zenone ammette la continuità dello spazio,mentre invece imponeva nei suoi ragionamenti una discretizzazione del tempo. Lo abbiamo visto appunto nel paradosso della freccia.

Intanto perchè dicotomia? Il termine dicotomia deriva dal greco διχοτομία, dichotomìa: composto da δίχα e τέμνω ed è usato prevalentemente in matematica, filosofia e linguistica. La dicotomia è dunque la divisione di un’entità in due parti che non necessariamente si escludano dualisticamente a vicenda ma che possono essere complementari. Vedremo che Zenone qui dividerà in due parti complementari porzioni di spazio.

L’enunciato del paradosso

Supponiamo che un atleta debba percorrere uno stadio di lunghezza ***l*** partendo da una porta e arrivando all’ altra. Non si può giungere all’estremità di uno stadio senza prima averne raggiunto la metà, ma poi si dovrà raggiungere la metà della metà rimanente e così via . Evidenziamo il ragionamento nella seguente illustrazione:



Il ragionamento che propone Zenone è il seguente :

questo procedimento lo possiamo ripetere all’infinito, e le porzioni di spazio rimanente sono finite; ergo la somma infinita per quanto grande sia la velocità dell'atleta mi dà degli intervalli di tempo **sempre finiti**, per cui il tempo complessivo, che è la somma di tali tempi , mi darà un tempo infinito, ovvero l'atleta non raggiungerà mai l'altra porta dello stadio.

La soluzione matematica

L'errore di Zenone, è che considera gli intervalli sempre finiti; ma questo non è proprio preciso. Gli intervalli sono sì finiti, ma la loro lunghezza tende a zero, ovvero diventano .. infinitesimi. Per stranezze matematiche che però vengono evidenziate nelle serie matematiche, non è detto che la somma di infiniti termini finiti dia sempre un termine infinito. Senza entrare nei particolari formali, vediamolo in modo semi-intuitivo. Supponiamo che la lunghezza sia l=1; e così pure che la velocità dell'atleta sia unitaria. Per trovare il tempo somma che chiamiamo T, bisogna sommare i tempi:

T=1/2+1/4+1/8+… ecc, ecc, dividendo sempre per due. Questo, usando le formule, si può scrivere in funzione del numero delle suddivisioni, in tal modo:

$$T_n = \sum_1^n \frac{1}{2^n} = 1 + 1/2 + 1/4 + ...1/2^n$$

Questa in matematica si chiama serie geometrica. Ma a noi non interessa; noi dimostreremo il paradosso usando solo un pò di algebra delle superiori e un pò di buon senso. Chi ha voglia può verificare l'identità:

$$(1-x)(1+x+x^2+....x^n) = 1-x^{n+1} \qquad \textbf{1)}$$

i più pratici possono farlo usando il principio di induzione;

chi è spaventato dalla generalità di **n** può provare con n=3,4,5,ecc.

ma se è vera la 1) allora la somma dei primi n termini è data da:

$$(1 + x + ...x^n) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

che si ottiene dalla 1) dividendo ambo i membri per (x-1),supponendo x<>1

Ma allora, sostituendo a x il valore 1/2 otteniamo:

$$1 + 1/2 + 1/4 + ...1/2^n = \frac{1 - 1/2^{n+1}}{1 - 1/2} = 2 - 1/2^n$$

ma allora, portanto l'1 a destra:

$$1/2 + 1/4 + ...1/2^n = 1 - 1/2^n$$

ora, il nostro **n** diventa arbitrariamente grande, ovvero in lingiaggio matematico tende a infinito. Cosa ne sarà del secondo membro? $\frac{1}{2^n}$ diventerà sempre più vicino a zero. Ma molto più velocemente di quanto aumenti n, essendo a esponente del numero 2. E proprio qui sta il succo del discorso; n aumenta in modo lineare, ma il tempo diminuisce in modo esponenziale.

Dunque la somma, per n infinito, diventerà 1 *. Ma 1 è un tempo finito.

(* in linguaggio matematico, il limite di $lim_{n \to \infty} 1 - 1/2^n = 1$)

Per chi ha dei dubbi, consiglio un bellissimo video dove le cose sono spiegate senza l'ausilio dell'analisi matematica :